**Практическая работа 14,15**

«Решение задач условной и безусловной оптимизации»

**Цель:** освоить численные методы безусловной оптимизации средствами интегрированной среды MathCAD.

**Образовательные результаты, заявленные во ФГОС третьего поколения:**

Студент должен

уметь:

- работать с пакетами прикладных программ аналитического и численного исследования математических моделей;

знать:

- основные типы математических моделей, используемых при описании сложных систем и при принятии решений;

- методы исследования математических моделей разных типов.

**Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы**

# **Задача безусловного экстремума**

Рассмотрим задачу безусловного минимума [14]

 (3.3)

в предположении, что  определена и непрерывна в каждой точке  вместе со всеми своими частными производными по , т.е. .

**Определение 3.4.** Точка  – *оптимальный план* (решение задачи (3.3), *точка абсолютного* или *глобального минимума*), если

.

**Определение 3.5** Точка  – локально *оптимальный план* (*точка относительного* или локального *минимума*), если при некотором  выполняются соотношения

.

Каждый оптимальный план является и локально оптимальным при любом  (но не наоборот). В дальнейшем под решением задачи (3.3) будет подразумеваться локально оптимальный план. Любое необходимое условие минимума для локально оптимального плана есть необходимое условие минимума для (глобально) оптимального плана (но не наоборот).

В задачах выпуклого программирования каждый локально оптимальный план есть и глобально оптимальный план.

**Определение 3.6** *Градиент функции*  *–* это вектор, который указывает направление наискорейшего роста этой функции, и чей модуль равен скорости ее изменения в этом направлении. Компоненты вектора градиента равны частным производным  по всем её аргументам .

**Теорема 3.3 (необходимые условия экстремума первого порядка).** В каждой точке локального минимума (максимума)  выполняется *условие стационарности*

, т.е. . (3.4)

Решения уравнения

 (3.5)

называются *стационарными точками функции* .

Таким образом, если существуют оптимальные планы задачи (3.3), то они ищутся среди стационарных точек целевой функции, далее сравниваются в них значения и отбирается наилучшая.

**Пример 3.1 **. Множество **** не пусто (содержит точку ), замкнуто и ограничено ( при ). Оптимальные планы существуют и удовлетворяют равенству (3.4): , которое имеет единственное решение . Следовательно,  – оптимальный (глобальный) план.

**Пример 3.2 **. Уравнения стационарности (3.5): ** несовместны. Это означает, что задача (3.3) не имеет решения. Задача максимизации  также не имеет решения, так как нетрудно заметить, что необходимое условие максимума совпадает с (3.4).

**Пример 3.2 **. Уравнения стационарности: ** имеют единственное решение , которое, однако, не является оптимальным планом задачи (3.5), так как .

Результаты примеров 3.2, 3.3 связаны с тем, что они не имеют решений.

**Теорема 3.4 (необходимые условия экстремума второго порядка).** Пусть . В каждой точке  локального минимума (максимума) матрица Гессе вторых производных целевой функции неотрицательна (неположительна):

 (3.6)

Теорема 3.4 позволяет, вообще говоря, среди стационарных точек функции отбросить те, которые не могут быть оптимальными планами.

**Пример 3.3 **.Уравнения стационарности: **** имеют единственное решение , на котором условие (4) не выполняется:

.

Задача (3.3) не имеет решение.

Таким образом, с помощью необходимых условий экстремума можно доказать отсутствие оптимальных планов.

**Теорема 3.5 (достаточные условия экстремума).** Стационарная точка  является:

- точкой локального минимума, если ;

-точкой локального максимума, если .

Таким образом, при решении задачи на безусловный экстремум можно пользоваться схемой (рис.3.2).

**Теорема 3.6 (необходимые условия экстремума первого порядка).** Для каждого локально оптимального плана  задачи (3.7) найдутся такие числа , не равные одновременно нулю и такие, что выполняются следующие условия:

- условие стационарности обобщенной функцией Лагранжа по :

 (3.8 а)

- условие допустимости решения:

. (3.8 б)

Если при этом градиенты  в точке  линейно независимы (выполняется условие регулярности), то .

**Замечания 3.1**

1. Система (3.8) содержит  уравнений с  неизвестными . Точки , удовлетворяющие системе при некоторых , называются *условно-стационарными.*
2. При решении задач проверка регулярности затруднена, так как точка  заранее не известна. Поэтому, как правило, рассматриваются два случая:  и . Если , в системе (3.8 а) полагают . Это эквивалентно делению системы уравнений (3.8 а) на  и замене  на . При этом обобщенная функция Лагранжа становится классической, а сама система (3.8) имеет вид

 (3.9 а)

. (3.9 б)

Здесь число уравнений равно числу неизвестных.

1. Точка экстремума, удовлетворяющая системе (3.8) при , называется *регулярной,* а при  – *нерегулярной*. При этом в обобщенной функции Лагранжа исчезает член, содержащий целевую функцию, а в необходимых условиях минимума не используется информация, представляемая градиентом целевой функции.

|  |
| --- |
|  |
| Рис. 3.3. |

1. Система (3.9) отражает тот факт, что антиградиент целевой функции в регулярной точке экстремума  является линейной комбинацией градиентов ограничений. Точка  условного экстремума (максимума) является точкой касания линии уровня целевой функции и кривой, описывающей ограничение (рис.3.3). В точке  возможно движение вдоль ограничения, связанное с увеличением функции.
2. Условие допустимости решения, являющееся следствием постановки задачи (3.7), включено в (3.8), (3.9) для удобства формирования алгоритма решения задачи.

**Определение 3.10** *Второй дифференциал обобщенной (классической) функции Лагранжа*  называется функция



**Определение 3.11** *Первым дифференциалом ограничения* **** называется функция

.

**Теорема 3.7 (необходимые условия экстремума второго порядка).** Пусть  – регулярная точка минимума (максимума) в задаче (3.7) и имеется решение  системы (3.9). Тогда второй дифференциал классической функции Лагранжа, вычисленный в точке , неотрицателен (неположителен):



для всех  таких, что

. (3.10)

**Теорема 3.8 (достаточные условия экстремума).** Пусть имеется точка , удовлетворяющая системе (3.9). Если в этой точке  для всех ненулевых  таких, что

,

то точка  является точкой локального минимума (максимума) в задаче (3.7).

**Замечание 3.2** Достаточные и необходимые условия экстремума второго порядка проверяются в условно-стационарных точках, которые удовлетворяют системе (3.8) при  или системе (3.9), так как для практики представляет интерес случай, когда в функции Лагранжа присутствует целевая функция, экстремум которой ищется.

**Алгоритм решения задачи**

*Шаг 1.* Составить обобщенную функцию Лагранжа:

.

*Шаг 2.* Записать необходимые условия экстремума первого порядка:

1. ;
2. .

*Шаг 3.* Решить систему для двух случаев:

* 1. ;
  2.  (при этом поделить условие (а) на  и заменить  на ).

В результате найти условно-стационарные точки , выделив из них полученные при  (они могут быть регулярными точками экстремума).

*Шаг 4*. Для выделенных на шаге 3 точек проверить достаточные условия экстремума:

1. записать выражение для второго дифференциала классической функции Лагранжа в точке :

;

1. записать систему (3.10) в точке :

;

1. из предыдущей системы выразить любые  дифференциалов  через остальные  и подставить в ;
2. если  при ненулевых , то в точке  – условный локальный минимум. Если  при ненулевых , то в точке  – условный локальный максимум. Если достаточные условия экстремума не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка (см. теорему 3.7), следуя аналогичной процедуре. Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, а если не выполняются, то в точке  нет условного экстремума.

*Шаг 5.* Вычислить значение функции в точках условного экстремума.

**Пример 3.4** Найти экстремум функции  на множестве . Другими словами надо решить задачу:



Проверим условие регулярности. Так как , то условие выполняется (см. п.1 замечаний 3.3). Поэтому будем пользоваться классической функцией Лагранжа.

1. Составим классическую функцию Лагранжа:

.

1. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:
   1. 
   2. 
2. Решение системы:  – условно-стационарная точка.
3. Проверим достаточные условия экстремума:
   1. , так как



* 1. , так как ;
  2. Выразим дифференциал  через :  и подставим в ;
  3. так как  при , то в точке  – регулярный локальный условный минимум (строка 1 в табл. 3.1). Графическое решение на рис. 3.5.

|  |
| --- |
|  |
| Рис.3.5 |

1. Подсчитаем значение функции в точке условного экстремума:.

**Пример 3.5** Найти условный экстремум в задаче:



Проверим условие регулярности. Так как  в точке , то условие не выполняется (см. п.1 замечаний 3.3). Будем пользоваться алгоритмом с использованием обобщенной функцией Лагранжа.

1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

.

1. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:
   1. 
   2. 
2. Решим систему для двух случаев.

В первом случае . Тогда , так как в теореме 3.6 все множители Лагранжа не могут быть одновременно равны нулю. Отсюда .

|  |
| --- |
|  |
| Рис. 3.6 |

Во втором случае . Поделим уравнение приведенной в п.2 системы на  с заменой  на :



Рассмотрим второе уравнение. Если , то система несовместна. Если , то  и система тоже несовместна. Как видно, применение классической функции Лагранжа не дает результата.

1. Так как , достаточные условия экстремума не проверяются. Точка  со значением целевой функции  является точкой нерегулярного локального и глобального минимума, как следует из рис. 3.6

**Пример 3.6** Найти условный экстремум в задаче:



Будем следовать алгоритму, не проверяя условие регулярности.

1. Составим обобщенную функцию Лагранжа:

.

1. Выпишем необходимые условия экстремума первого порядка:
2. 
3. 
4. Решим систему для двух случаев.

В первом случае . Из п.2 следует:



Так как согласно теореме 3.6 , то из первых двух уравнений: . Однако при этом ограничение не выполняется: . Следовательно, система несовместна.

Во втором случае . Перепишем систему, приведенную в п.2, поделив уравнения на  с заменой  на :

 (3.11)

Рассмотрим второе уравнение. Если , то из третьего уравнения следует , а из первого  соответственно. Если  соответственно. Если , то первое уравнение имеет вид , т.е. система несовместна. Таким образом, найдены две условно-стационарные точки:



1. Проверим достаточные условия экстремума, используя (3.11):
2. ;
3. 
   1. исследуем точку , откуда  и  при . Поэтому в точке  – регулярный условный максимум.

Исследуем точку , откуда  и  при . Поэтому в точке  – регулярный условный минимум (строка 1 в табл. 3.1).

1. Подсчитаем значения функции в точках экстремума: . Графическое решение задачи изображено на рис. 3.7.

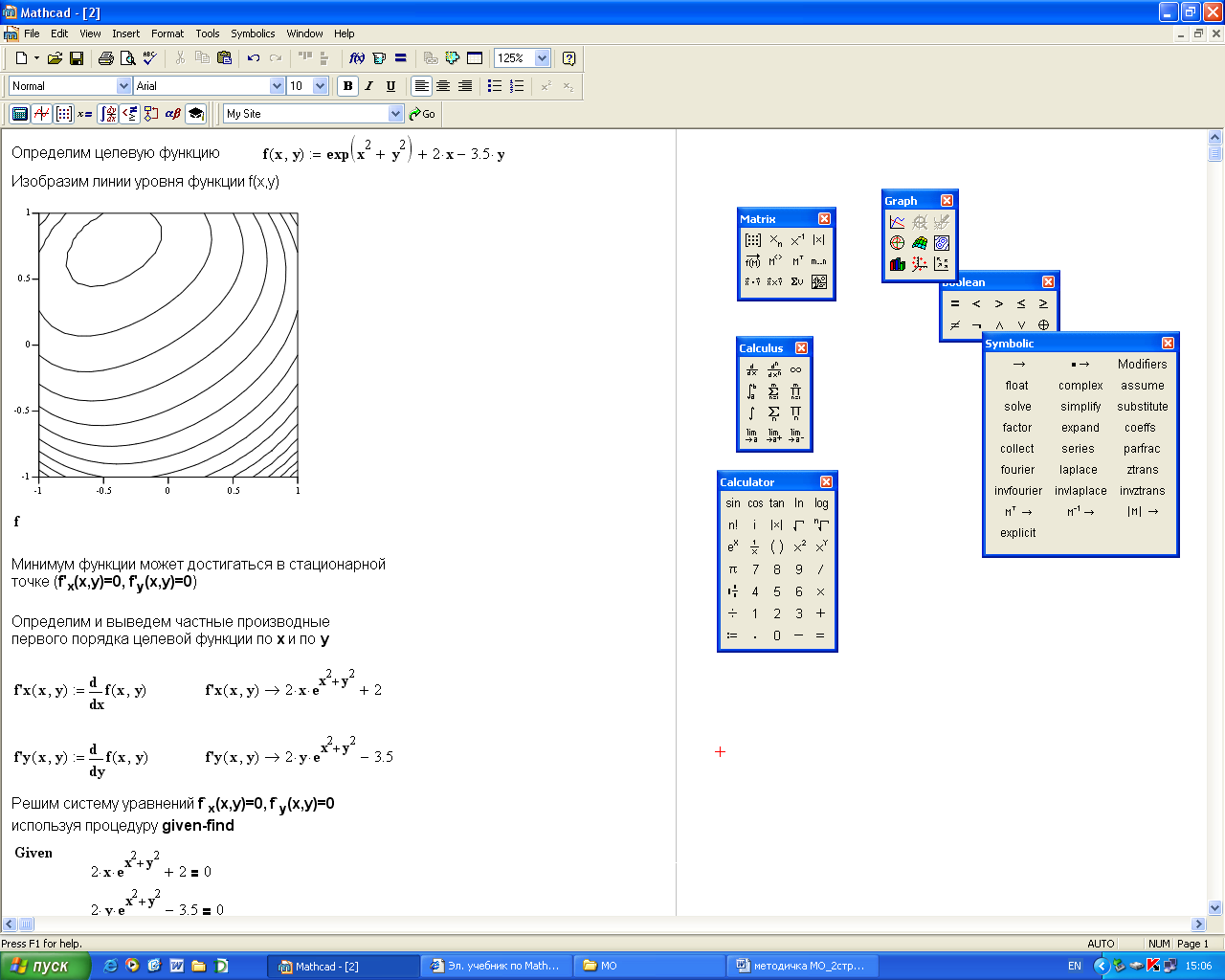
|  |
| --- |
|  |
| Рис. 3.7 |

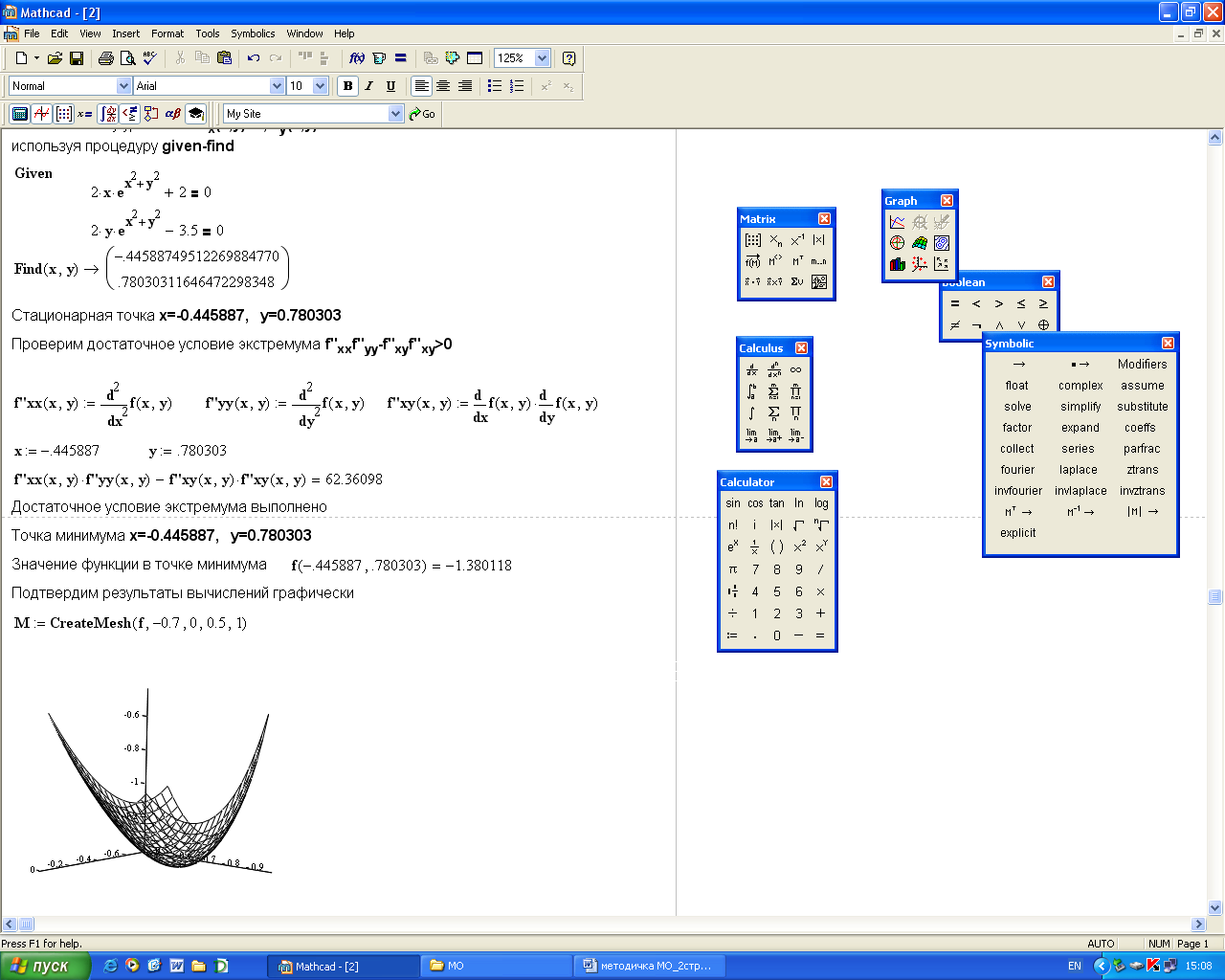
# **3.8 Применение средств пакета Mathcad для решения задачи**

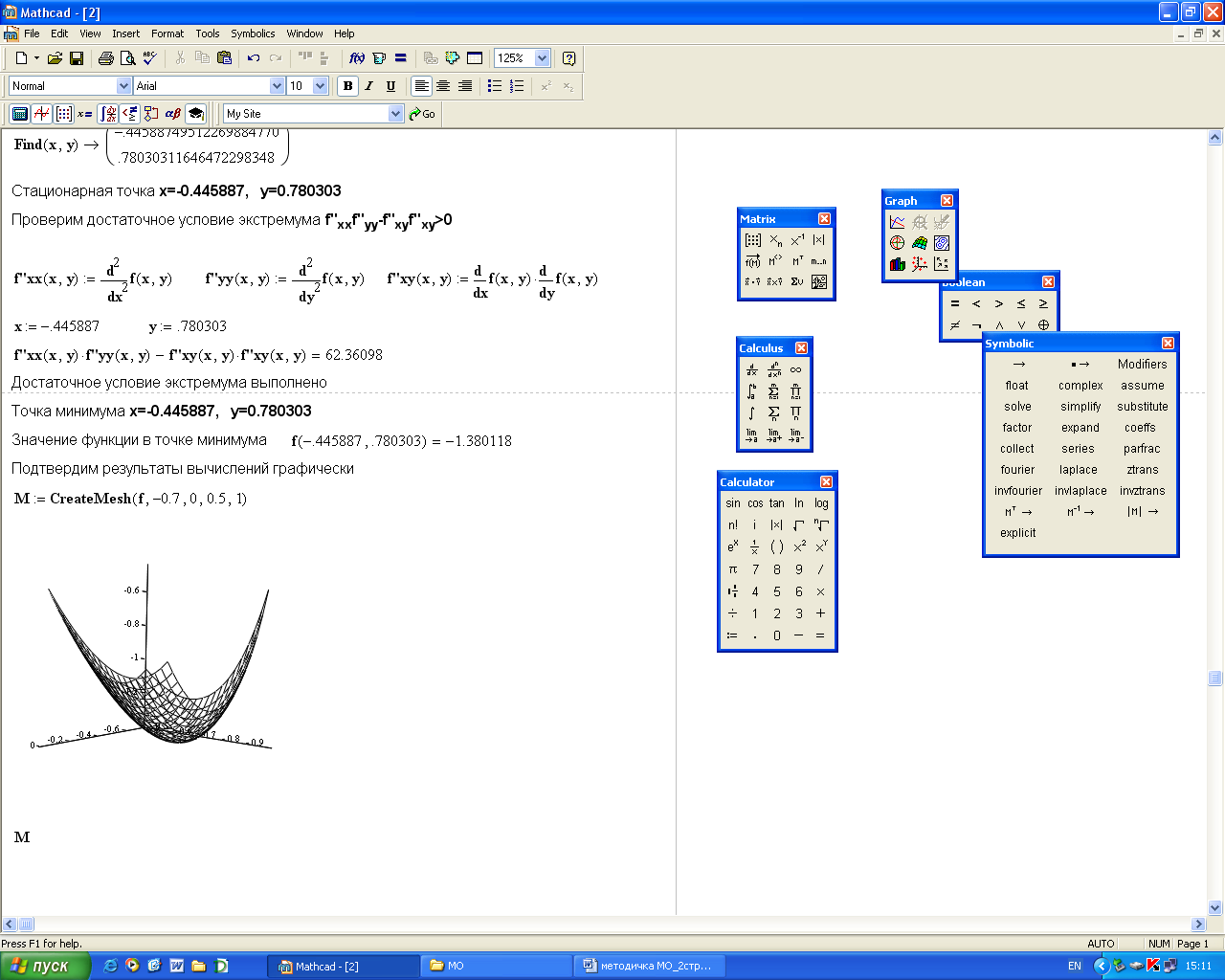
Рассмотрим примеры решения задач нелинейного программирования с помощью средств пакета Mathcad [15].

**Пример 3.14** Решить задачу безусловной минимизации гладкой функции двух переменных:



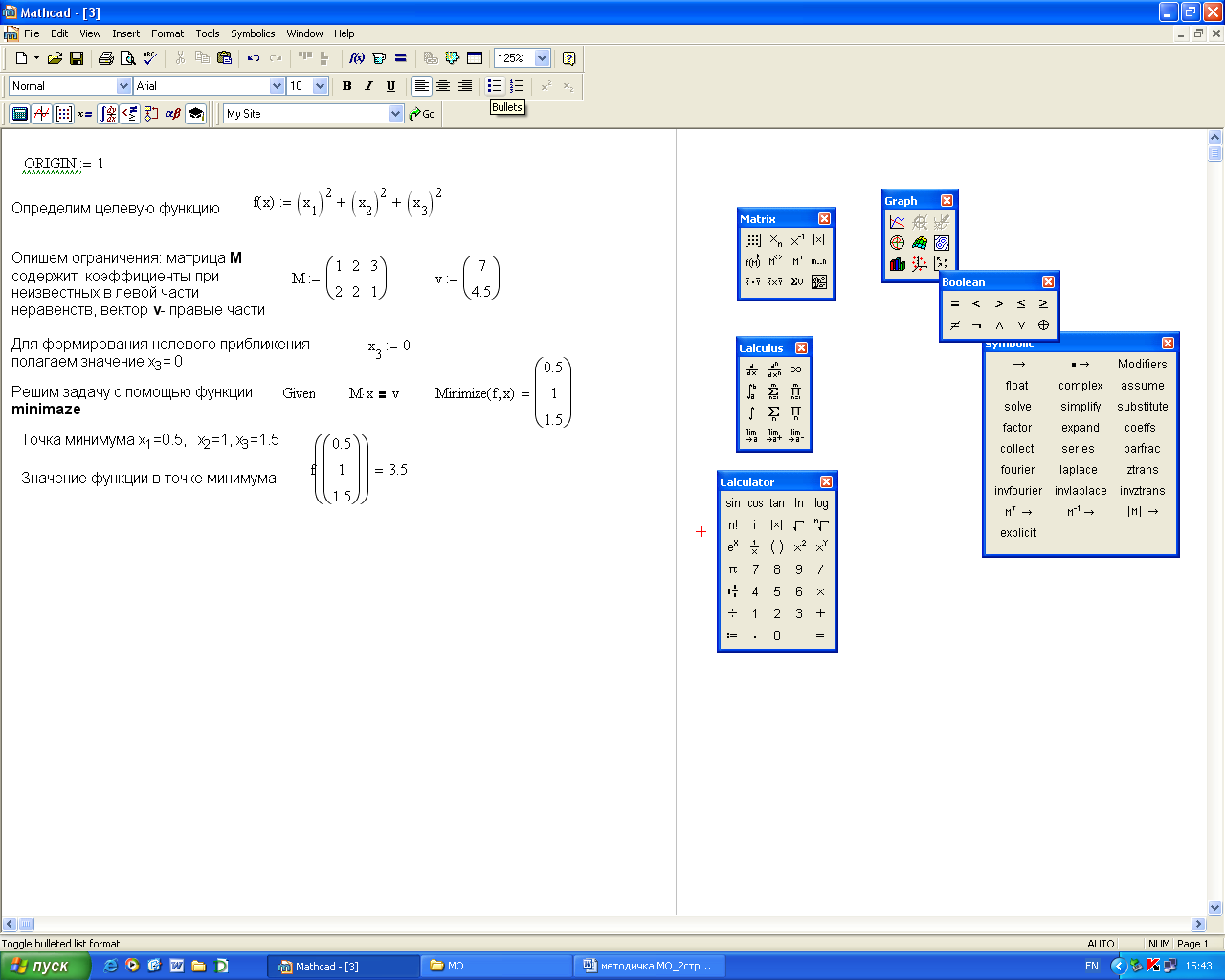
Воспользуемся необходимым условием экстремума.





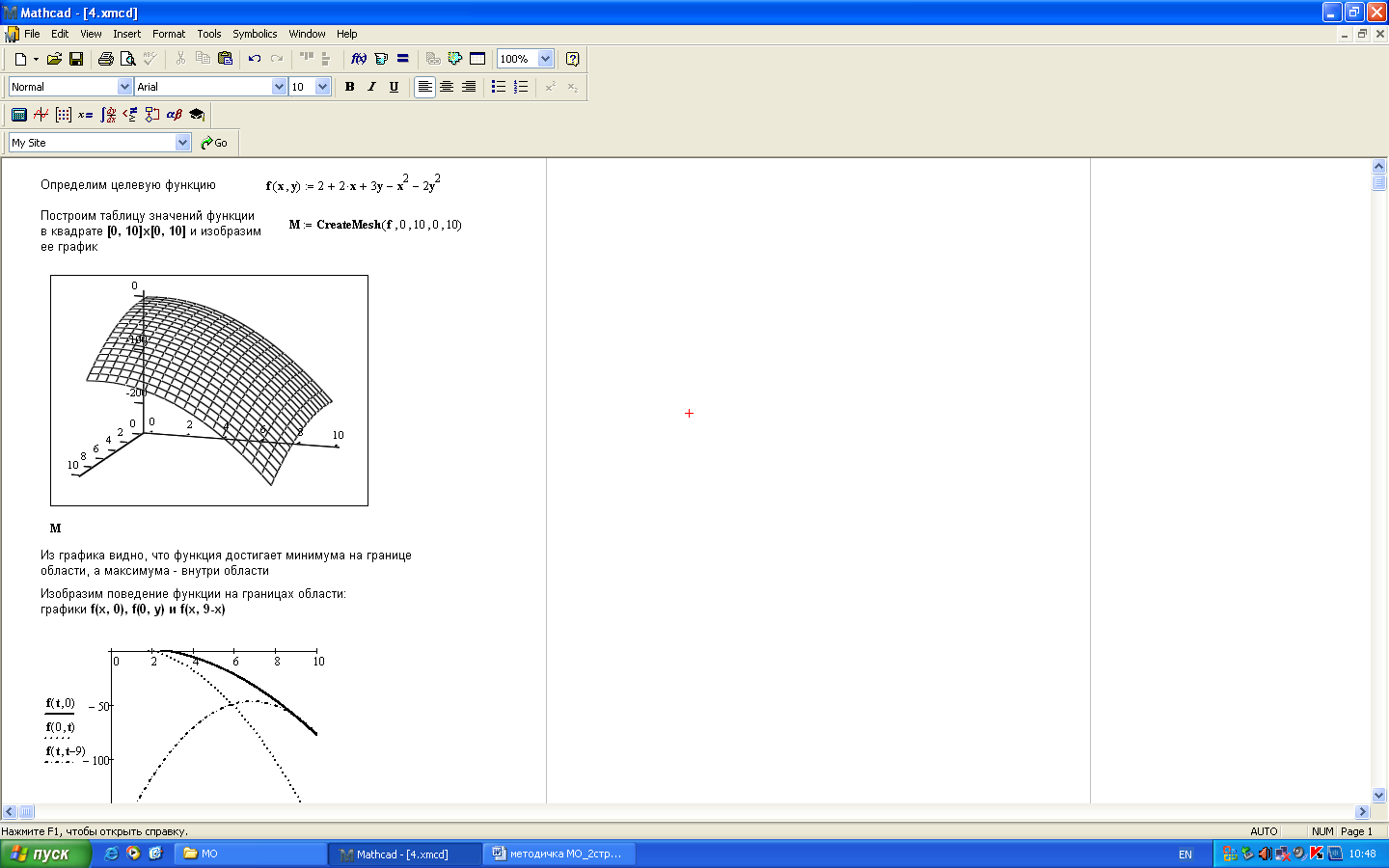
**Пример 3.15.** Решить задачу условного минимума с ограничениями типа равенств:

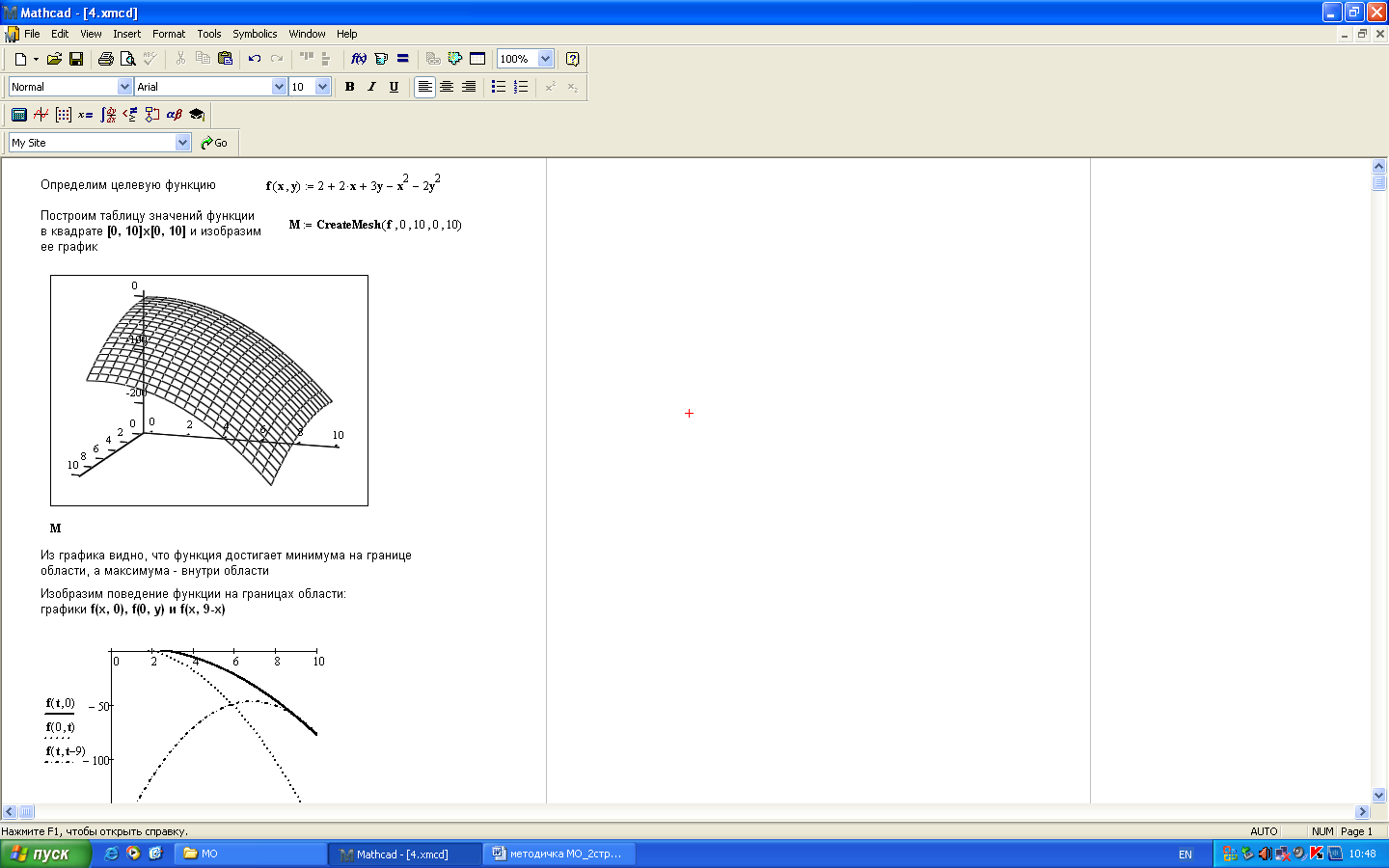


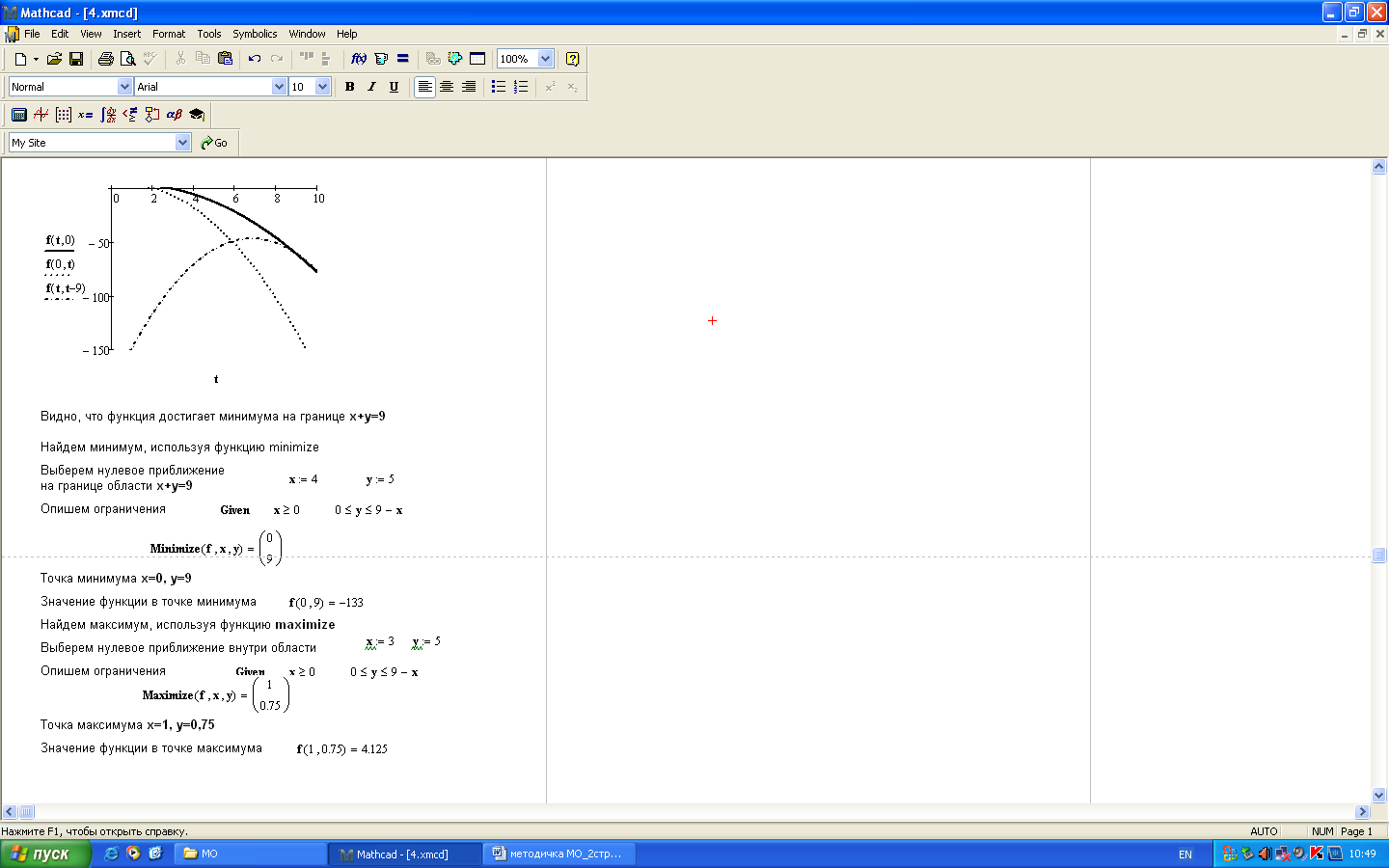


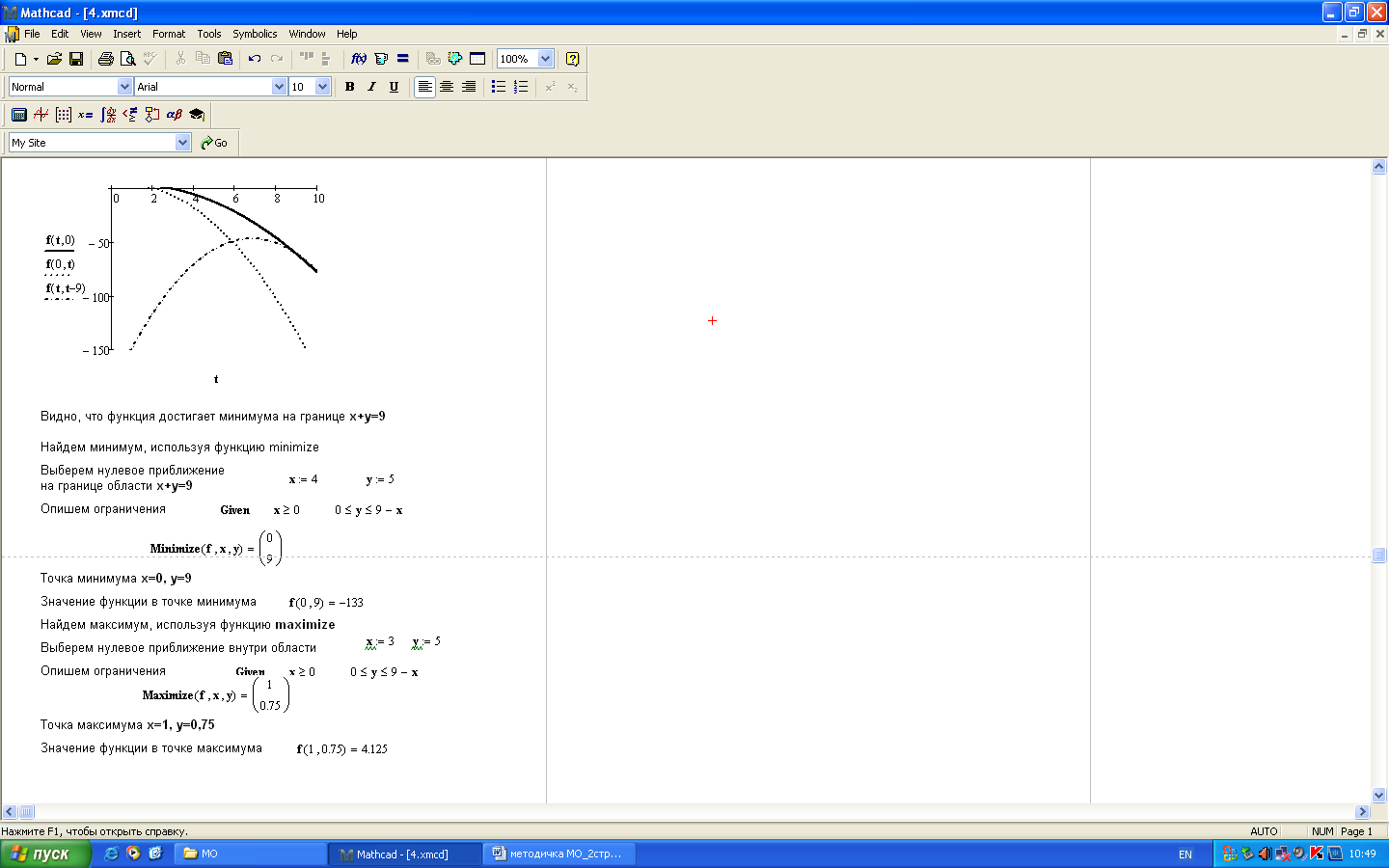
**Пример 3.16.** Решить задачу условного экстремума с ограничениями типа неравенств:











***Задание 1:***

Найти решение задачи безусловной минимизации

 для заданной целевой функции f(x), используя теоремы о необходимых и достаточных условиях безусловной минимизации.

***Методика выполнения задания:***

1. Исследуем функцию на экстремум. Найдем первые производные, приравняем к нулю и найдем корни (рис.).

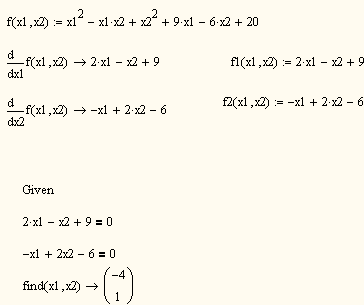


Рис.1 Исследование функции на экстремум

2. Найдем вторые производные (рис.).

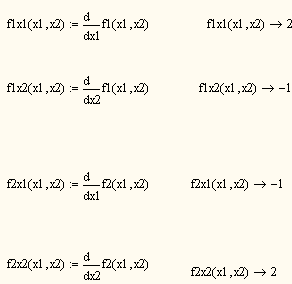
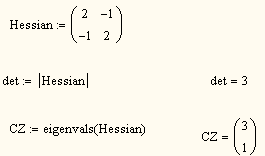


Рис.2 Нахождение вторых производных

Сформируем матрицу вторых производных (рис.). Находим определитель матрицы вторых производных и собственные значения матрицы вторых производных. Определитель , CZ>0. Следовательно точка (−4,1) − точка минимума.

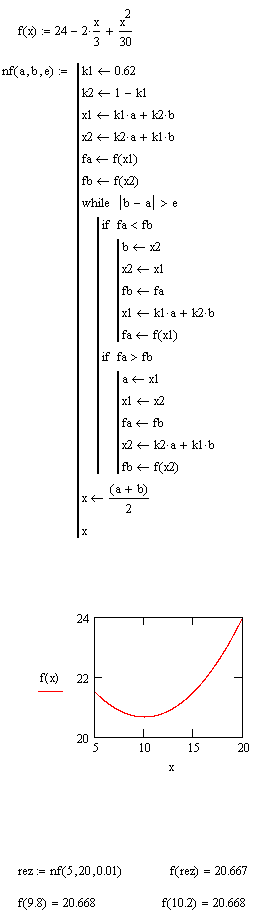
***Задание 2:***

Найти минимум функции  методом золотого сечения.

***Методика выполнения задания:***

Оформим программу в виде функции пользователя. Для нахождения промежутков унимодальности функции построим график − точка минимума находится в промежутке [5,20]. Непосредственной проверкой убеждаемся, что точка минимума найдена правильно. Фрагмент рабочего документа MathCAD с соответствующими числениями

нахождению минимума функции методом золотого сечения приведен ниже.



***Варианты индивидуальных заданий*:**

1 Найти точное решение задачи одномерной минимизации f(x)→ min. найти приближенное решение этой задачи с точностью е=0,01 методом золотого сечения.

| **№В** | **f(x)** |
| --- | --- |
| **1** |  |
| **2** |  |
| **3** |  |
| **4** |  |
| **5** |  |
| **6** |  |
| **7** |  |
| **8** |  |
| **9** |  |
| **10** |  |
| **11** |  |
| **12** |  |
| **13** |  |
| **14** |  |
| **15** |  |
| **16** |  |
| **17** |  |
| **18** |  |
| **19** |  |
| **20** |  |
| **21** |  |
| **22** |  |
| **23** |  |

**Задания**

Решить задачу (табл. 3.6)аналитически и с помощью пакета Mathcad. Сравнить результаты.

Для заданной квадратичной функции (табл. 3.6) провести по две итерации соответствующим методом, сопровождая вычисления геометрическими иллюстрациями.

В таблице 3.7 приведены экстремальная задача, допустимый план задачи  и три направления . Проверить, какие из направлений являются возможными, какие подходящими для заданной задачи.

В таблице 3.8 приведены экстремальная задача и некоторые планы. Проверить, какие из них являются оптимальными для заданной задачи.

Таблица 3.6. Варианты заданий 1, 2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Вариант** | **Экстремальная задача** | **Ответ** | **Метод** |
| 1 |  | (0; 4) | градиентного спуска с постоянным шагом |
| 2 |  | (0; 0) | наискорейшего градиентного спуска |
| 3 |  | (0; 0) | покоординатного спуска |
| 4 |  | (0; 0) | градиентного спуска с постоянным шагом |
| 5 |  | (1; 0)  (-1; 0) | наискорейшего градиентного спуска |
| 6 |  | (1; 0) | покоординатного спуска |
| 7 |  | (1; 3) | градиентного спуска с постоянным шагом |
| 8 |  | (3; 1) | наискорейшего градиентного спуска |
| 9 |  | (0; 0) | покоординатного спуска |
| 10 |  |  | градиентного спуска с постоянным шагом |
| 11 |  | (4; 3) | наискорейшего градиентного спуска |
| 12 |  | (-1; 0) | покоординатного спуска |
| 13 |  | (0; 2) | градиентного спуска с постоянным шагом |
| 14 |  | (0; 4) | наискорейшего градиентного спуска |
| 15 |  | (0; 0) | покоординатного спуска |
| 16 |  | (0; 3) | градиентного спуска с постоянным шагом |
| 17 |  | (0; 2) | наискорейшего градиентного спуска |
| 18 |  |  | покоординатного спуска |
| 19 |  | (0; 1) | градиентного спуска с постоянным шагом |
| 20 |  | (0; 1) | наискорейшего градиентного спуска |
| 21 |  |  | покоординатного спуска |
| 22 |  |  | градиентного спуска с постоянным шагом |
| 23 |  | (2; 12) | наискорейшего градиентного спуска |
| 24 |  | (3; 4) | покоординатного спуска |
| 25 |  | (13;10,5) | градиентного спуска с постоянным шагом |

**Контрольные вопросы**

1. Особенности задач условной и безусловной оптимизации.

2. Чем принципиально отличается метод покоординатного спускаот методов градиентного спуска?

3.Как описывается свойство унимодальности функции?

4.Чем отличаются прямые и косвенные методы минимизации функции?